共変式の環と半不変式の環の同型性(5)

著者	桜岡 充
雑誌名	日本歯科大学紀要. 一般教育系
巻	37
ページ	7-10
発行年	2008-03-20
URL	http://doi.org/10.14983/00000633

共変式の環と半不変式の環の同型性 V

Isomorphism between Covariant Ring and Semi-invariant Ring V

新潟生命歯学部 桜岡 充

Mitsuru SAKURAOKA

The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1-8. Niigata 951-8580, Japan

(2007年11月27日受理)

Abstract

We study relationships between the semi-invariant and it's automorphic form, then we analyze the series of differential equations which make constraints on the automorphic forms. Special functions, such as elliptic function or hypergeometrics, are all charactorized by their differential equations. In like manner, it is possible that the rational type solution of non-linear differential equation with constant coefficients can give automorphic forms the intrinsic charactoristics.

Key Index Words : isomorphism, Lie ring, transvectant.

Sec 9 Schwarz 微分と保型形式

ここで半不変式と保型形式の関係について系統的に議論しておこう．楕円関数や超幾何関数などの枢要な特殊関数はそれが従う微分方程式によって特徴づけられているが，保型形式は非線型ではあるが1階および2階の定数係数の微分方程式の原点近傍における有理形解で特徴づけることができる．

独立変数μ，従属変数ξに対して

$$\{\xi,\ \mu\}=(\xi''/\xi')'-(\xi''/\xi')^2/2$$

とかき，この量をμに関するξのSchwarz微分という．複素平面上の単連結領域Dで，関数$Q(\mu)$は正則であるとする．2階の線形微分方程式：

$$\eta''(\mu)+\frac{1}{2}Q(\mu)\eta\cdot(\mu)=0 \tag{1}$$

の基本解の1つを$(p_1(\mu),\ p_2(\mu))$と書くとき，$p_2(\mu)/p_1(\mu)=\xi(\mu)$は3階の微分方程式

$$\{\xi,\ \mu\}=Q(\mu)$$

を満たす．逆に$\eta(\mu)$をD内の点μ_0で正則であるような上式の解とすれば(1)の互いに1次独立な解$p_1(\mu)$，$p_2(\mu)$があって，$p_2(\mu)/p_1(\mu)=\xi(\mu)$と表される．なお，この場合$p_1(\mu_0)=1$とすれば，$(p_1(\mu),\ p_2(\mu))$は唯一確定である．これは，以下のように示される．$p_1(\mu)$，$p_2(\mu)$は(1)の基本解であるので，

$$\begin{vmatrix} \eta'' & p''_2(\mu) & p''_1(\mu) \\ \eta' & p'_2(\mu) & p'_1(\mu) \\ \eta & p_2(\mu) & p_1(\mu) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p'_2(\mu) & p'_1(\mu) \\ p_2(\mu) & p_1(\mu) \end{vmatrix}\left(\eta''+\frac{1}{2}Q(\mu)\eta\right)$$

とかけるので，

$$\begin{vmatrix} p''_2(\mu) & p''_1(\mu) \\ p_2(\mu) & p_1(\mu) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p'_2(\mu) & p'_1(\mu) \\ p_2(\mu) & p_1(\mu) \end{vmatrix}=0$$

つまり，$\begin{vmatrix} p'_2 & p'_1 \\ p_2 & p_1 \end{vmatrix}$は定数であって，これを1として一般性を失うことはない．このとき，

$$Q(\mu)=2\cdot\begin{vmatrix} p'_2(\mu) & p'_1(\mu) \\ p_2(\mu) & p_1(\mu) \end{vmatrix},$$

$$\xi=(p_2/p_1)'=\begin{vmatrix} p'_2 & p'_1 \\ p_2 & p_1 \end{vmatrix}/p_1{}^2,$$

$$\xi''/\xi' = -2\cdot\frac{p_1'}{p_1},\ \{\xi''/\xi'\}' = -2\cdot\frac{p_1'}{p_1} + 2\cdot\left(\frac{p_1'}{p_1}\right)^2,$$

となる．ここで，$p_1'' = -(1/2)\cdot Q(\mu)p_1$ であるから，

$$\{\xi,\ \mu\} = \{\xi''/\xi'\}' - \{\xi''/\xi'\}/^2 = Q(\mu)$$

が得られる．逆にこの3階の微分方程式の $\mu=\mu_0$ において正則であるような解を $\xi(\mu)$ とかき，この解の $\mu=\mu_0$ における初期値を $\xi(\mu_0)$，$\xi'(\mu_0)$，$\xi''(\mu_0)$ とする．$\xi(\mu)$ は $\mu=\mu_0$ で正則であるので，$\xi'(\mu_0)\neq 0$ である．よってこの線形微分方程式の基本解で初期値が

$$(p_1(\mu_0),\ p_2(\mu_0)) = (1,\ \xi(\mu_0)),$$

$$(p_1'(\mu),\ p_2'(\mu)) = \left(\frac{-\xi''(\mu_0)}{2\,\xi(\mu_0)},\ \frac{2\,\xi'(\mu_0)^2 - \xi(\mu_0)\xi''(\mu_0)}{2\,\xi'(\mu_0)}\right),$$

であるもの選ぶことにする．こうすると $\xi(\mu) = p_2(\mu)/p_1(\mu)$ となることをいえばよい．そして，それには初期値が一致することをみれば十分である．$(p_1(\mu),\ p_2(\mu))$ の μ_0 における初期値について

$$[p_2/p_1]'' = \xi(\mu_0),$$
$$[p_2/p_1]'_{\mu=\mu_0} = \frac{p_2'(\mu_0)p_1(\mu_0) - p_1'(\mu_0)p_2(\mu_0)}{p_1(\mu_0)^2} = \xi'(\mu_0),$$

であり，同様に $[p_2/p_1]''\mu_0 = \xi''(\mu_0)$ が示される．(証明終り)

したがって，(1)で，$\eta''(\mu)=0$ の解は μ について1次式であるから

$$\xi = (\alpha\mu+\beta)/(\gamma\mu+\delta)\ \left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in GL(2,\ C)\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad \{\xi,\ \mu\} = 0$$

であることが導かれる．また，$d\xi/d\mu = d\xi/du\cdot du/d\mu$ であるから

$$\{\xi,\ \mu\} = \frac{d}{d\mu}\left\{\frac{d^2\xi}{d\mu^2}\Big/\frac{d\xi}{d\mu} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d^2\xi}{d\mu^2}\Big/\frac{d\xi}{d\mu}\right)^2\right\}$$
$$= \{\xi,\ u\}(du/d\mu)^2 + \{u,\ \mu\}$$

が成り立つので $u\to\mu$ として $\{\mu,\ \xi\}(d\xi/d\mu)^2 + \{\xi,\ \mu\} = 0$ がいえて，さらに $\mu\to(\alpha\xi+\beta/\gamma\xi+\delta)$ とすると

$$\{\xi,\ \mu\} = \left\{\xi,\ \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}\right\}\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2 + \left\{\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\ \mu\right\}$$
$$= \left\{\frac{\alpha'\mu+\beta'}{\gamma'\mu+\delta'},\ \mu\right\}\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2 + \left\{\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\ \mu\right\};$$
$$\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\delta' & \beta'\\ \gamma' & \alpha'\end{pmatrix}$$
$$= \left\{\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\ \mu\right\};\ \left[\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in GL(2,\ C)\right]$$

が得られる．最後に上式で $\mu\to(\alpha\mu+\beta/\gamma\mu+\delta)$ を代入すれば

$$\left\{\xi,\ \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}\right\} = -\{\mu,\ \xi\}\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2(\gamma\mu+\delta)^4/(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$$
$$= \{\xi,\ \mu\}(\gamma\mu+\delta)^4/(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$$

であることが導かれるので

$$\left\{\xi,\ \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}\right\}\cdot\frac{(\alpha\delta-\beta\sigma)^2}{(\gamma\mu+\delta)^4} = \{\xi,\ \mu\};$$
$$\left[\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in GL(2,\ C)\right] \tag{2}$$

なるSchwarz微分がもつ基本的性質に関する公式が得られる．以上の準備のうえで保型形式および保型関数の一般的定義からのべることにする．

複素数体Cに ∞ を加えたRiemann球面 $\overline{C}$ をとる．$\overline{C}-\{\infty\}$ では ξ，$\overline{C}-\{0\}$ では ξ^{-1} が局所座標になっている．$\overline{C}$ 上で $SL(2,\ C)$ は1次有理変換：

$$\xi\ \to\ \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\quad\left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in SL(2,\ C)\right)$$

としてはたらく．このとき，kernelは ±1 であるので $PSL(2,\ C) = SL(2,\ C)/\pm1$ を導入すれば，射影特殊線形写像群 $PSL(2,\ C)$ が $\overline{C}$ に作用するということでもある．$PSL(2,\ C)$ の部分郡 Γ と $\overline{C}$ の領域Dに対して，Γ の要素がDをDの上に写像しDの任意点 ξ_0 について，集合 $\{\sigma(\xi_0)|\sigma\in\Gamma\}$ がDの内部に集積点をもたないとき，部分群 Γ が領域Dに真性不連続に作用するという．

$\sigma = \begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}$ が同じ固有値をもつちき，σ は放物型（parabolic）であるといい，その不動点（$\sigma(a)=a$ となる点）をその放物型不動点であるという．部分群 Γ が放物型が要素をもち a がその不動点であるとき，a を Γ の放物型不動点または尖点とよぶ．定義から明らかなように尖点は Γ が真性不連続に作用する領域 Ω に含まれない．いま

$$\overline{\Omega}=\Omega\cup\{\Gamma\text{ の cusp 全体}\} \tag{3}$$

とかくと，商空間 $\overline{\Omega}/\Gamma$ には，1次元複素多様体であるところの Riemann 面の構造が自然に入る．これが（Ω，Γ）の Riemann 面と呼ばれるものである．商空間 Ω/Γ は $\overline{\Omega}/\Gamma$ のなかで稠密である．この小論では $\overline{\Omega}/\Gamma$ がコンパクトな Riemann 面のときを論じることにする．

つぎに，Riemann 面 M の点 p のまわりで局所座標 ξ の局所有理型関数 $h(\xi)$ を用いて，$h(\xi)d\xi^k$ と表される量を $h(\xi)$ の k 次有理型微分と呼ぶことにする．ここに，k は整数であり $\tau(\mu)\left(\frac{d\mu}{d\xi}\right)^k=h(\xi)$ であるときに限り，$h(\xi)d\xi^k=\tau(\mu)\cdot d\mu^k$ である．すなわち，$M=\cup V_a$（V_a：局所座標 ξ_a の近傍）であり，V_a での ξ_a の有理型関数の組 $\{h_a(\xi_a)\}$ が $h_a(\xi_a)d\xi_a{}^k=h_\beta(\xi_\beta)d\xi_\beta{}^k$（$V_a\cap V_\beta$）を満たすところの M 上の1つの k 次有理型微分を定義する．さらに $\overline{C}$ の領域 Ω に真性不連続に作用する PSL(2, C) の部分群を Γ とし，（Ω，Γ）の Riemann 面 $M=\overline{\Omega}/\Gamma=(\Omega\cup\{\Gamma\text{ の cusp 全体}\})/\Gamma$ はコンパクトである．Ω の有理型関数 $h(\xi)$ と整数 k に関して $h(\xi)d\xi^k$ が Riemann 面 M の k 次有理型微分に拡張されるとき $h(\xi)$ は Γ に関する指数 $-2k$ の有理型保型形式（meromorphic automorphic form）と呼ぶ．
特に k が正の整数のとき，k 次微分 $h(\xi)d\xi^k$ が高々尖点のところでだけ k 位以下の極しか持たないとき，$h(\xi)$ を指数 $-2k$ の整保型形式と呼ぶ．ここで，M 上の点 p の局所座標を s とかき $h(\xi)d\xi^k=\tau(s)ds^k$ とおくとき $\tau(s)$ の点 p における極の位数を，Γ における $h(\xi)d\xi^k$ の極の位数とよぶことにする．このとき，$h(\xi)d\xi^k$ が k 次有理型微分であるためには

$$h\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)\cdot\left(d\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)/d\xi\right)$$
$$=h\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)(\gamma\xi+\delta)^{-2k}\left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in SL(2,\ C)\right)$$

ということから

$$h(\alpha\xi+\beta/\gamma\xi+\delta)=(\gamma\xi+\delta)^{-2k}h(\xi)\quad\left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in\Gamma\right) \tag{4}$$

であることが条件である．つまり，(4) は $h(\xi)$ が指数 $-2k$ を持つための必要条件なのである．

部分群 Γ についての指数 $-2k$ の保型形式 $h(\xi)$ で，k 次微分 $h(\xi)d\xi^k$ が各尖点の Riemann 面上の像において，高々（k−1）位の極しかもたないときには，これを指数 $-2k$ の尖点形式とよぶ．そこで，整保型形式が尖点形式であることを判別する手段として尖点およびその Riemann 面上の像についての標準局所座標の組を導入しよう．a を Γ の尖点とするとき，複素数 c を適当に選んで

$$\xi_1=c/(\xi-a),\quad \sigma=\begin{pmatrix}0 & c\\ 1 & -a\end{pmatrix}$$

とすれば $\xi=a$ は∞に写り，$\sigma^{-1}\Gamma\sigma$ の要素で∞を不動点とする要素のみがつくる部分群が $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ で生成される無限群になるように選べる．このとき，$q=\exp\{i2\pi\cdot\xi_1\}$ とおいて，（ξ_1，q）を尖点 a およびその像についての標準局所座標とよぶことにしよう．k を正の整数とし，$h(\xi)$ を Γ に関する保型形式にする．さらに対応する k 次微分を

$$h(\xi)d\xi^k=g(\xi_1)d\xi_1{}^k=\tau(q)dq^k$$

と3通りの表現を用意してみる．いま

$$dq/d\xi_1=i2\pi q,\quad g(\xi_1)=\tau(q)\{dq/d\xi_1\}^k=\{i2\pi\}^k\tau(q)q^k$$

であるので，$h(\xi)$ が整保型形式（尖点形式）であることと，$g(\xi_1)$ が q の関数として

$q=0$ で正則かつ零点をもつこととは同値である．

Γ を領域 Ω に対し真性不連続に作用する PSL(2, C) の部分群，k_1，k_2，・・，k_N を正の整数とし，$z_1=-2k_1$，$z_2=-2k_2$，・・，$z_N=-2k_N$ とかく．指数 $-2k_1$，$-2k_2$，・・，$-2k_N$ の Γ に関する保型形式を $h_1(\xi)$，$h_2(\xi)$，・・，$h_N(\xi)$，$(d_1,\ d_2,\ \cdot\cdot,\ d_N;\ p)$ 型の半不変式を $\Xi(\xi_1{}^{(0)},\ \xi_1{}^{(1)},\ \cdot\cdot,\ \xi_N{}^{(0)},\ \xi_N{}^{(1)},\ \cdot\cdot)$ で表す．Ξ の変数 $\xi_j{}^{(l)}$ に代えて

$$\{z_j(z_j-1)\cdot\cdot(z_j-l+1)\}^{-1}\cdot(d/d\xi)^l h_j(\xi) \tag{5}$$

を代入した量は Γ の指数 $-2(\Sigma d_jk_j+p)$ の保型形式である．$h_1(\xi)$，$h_2(\xi)$，・・，$h_N(\xi)$ が整保型形式ならば整保型形式であり，特に Ξ の重さ p が零でなければ尖点形式になる．

一般に，代数多様体の部分集合 S に対して，S を含む最小の部分代数多様体を S の Zariski 閉包と呼ぶ．S 上で零をと

る多項式はSのZariski閉包上でも零になる．いま，$h_1(\xi)$，$h_2(\xi)$，・・，$h_N(\xi)$ を指数がそれぞれ$z_1=-2k_1$，$z_2=-2k_2$，・・，$z_N=-2k_N$であるΓに関する保型形式とする．ΓのZariski閉包がPSL(2) である場合には $\{h_1(\xi)$，$h_2(\xi)$，・・，$h_N(\xi)\}$ に対応する $C\{((d/d\xi)^i\eta_j)$；$1\leqq j\leqq N\}$ の微分イデアルは $\{z_1$，z_2，・・，$z_N\}$ にかんして sl(2) 認容になる．さらに，Γの 保型形式 $h_1(\xi)$，$h_2(\xi)$，・・，$h_N(\xi)$ の共変式環は $\{h_1(\xi)$，$h_2(\xi)$，・・，$h_N(\xi)\}$ の定数係数微分多項式形(5)全体の保型形式に一致する．次節においては幾つかの指数の場合について保型形式を規定する微分方程式の具体形を論じる．

参考文献

1）桜岡充：群の可解性と準同型写像Ｉ，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**27**，21－26(1998)，**30**，23－27(2001)．

2）桜岡充：共変式の環と半不変式の環の同型性Ｉ，II，III，IV，日本歯科大学紀要（一般教育系）**33**，11－15(2004)，**34**，5－9(2005)，**35**，7－11(2006)，**36**，5－8(2007)．

3）J. A. Dieudonne and J. B. Carrell : Invariant Theory, old and new, Academic Press (1970).

4）森川寿：不変式論，紀伊国屋書店（1990）．

5）桜岡充：Kummer拡大体と準同型写像群Ｉ，II，日本歯科大学紀要（一般教育系）**31**，25－33(2002)，**32**，5－7(2003)．

6）永田雅宜：可換体論，裳華房（1967），可換環論，紀伊国屋(1992)．

7）O. Zariski and P. Samuel : Commutative algebra Ｉ，II，van Nostrand, New york I (1958)，II(1960)．

8）M. Nagata : Local rings, John Wiley, (1962)．

9）H. Saito : Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ. (1975)．

10) V. W. Guillemin : Infinite dimensional primitive Lie algebra, J. Diff. Geom. **4**，257－282(1970)．

11) O. Zaiski : Analytical irreducibilty of normal varieties, Ann. Math. **49**，352－361(1948)．

12) 松村英之：集合論入門，朝倉書店（1992）．